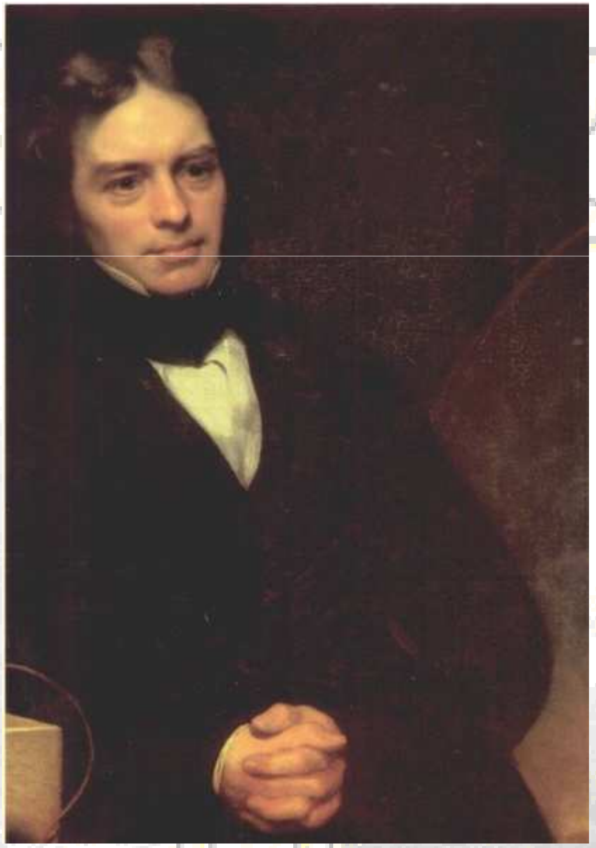
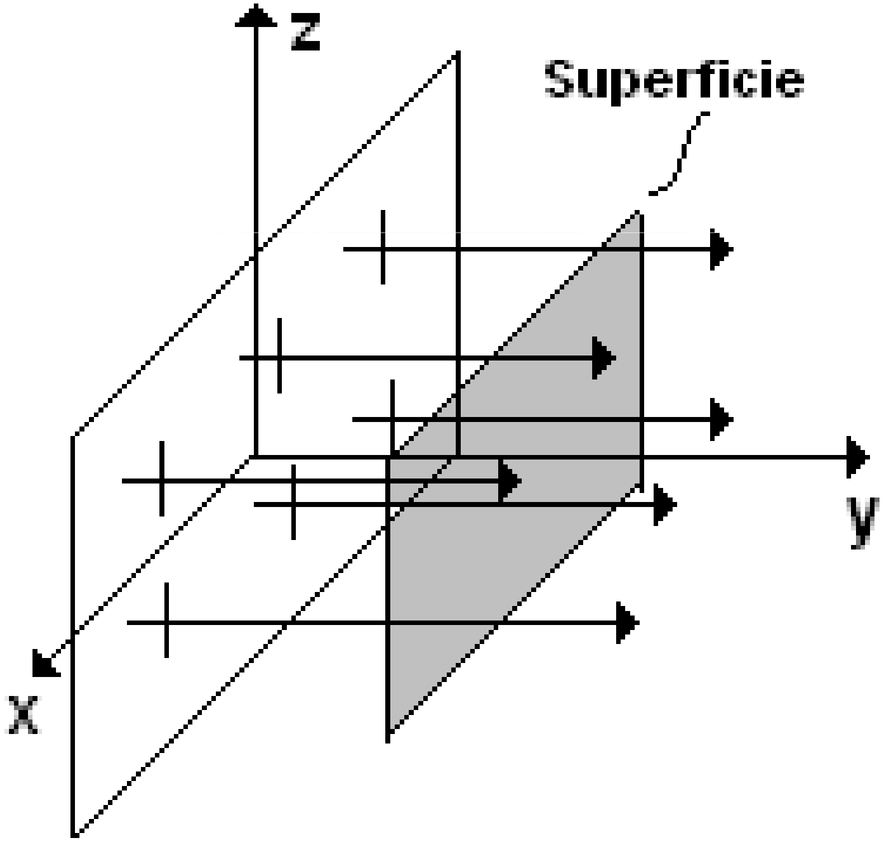
Flujo eléctrico

Michael Faraday, (Londres, 22 de septiembre de 1791 - *íd.* † 25 de agosto de 1867) fue un físico y químico inglés)

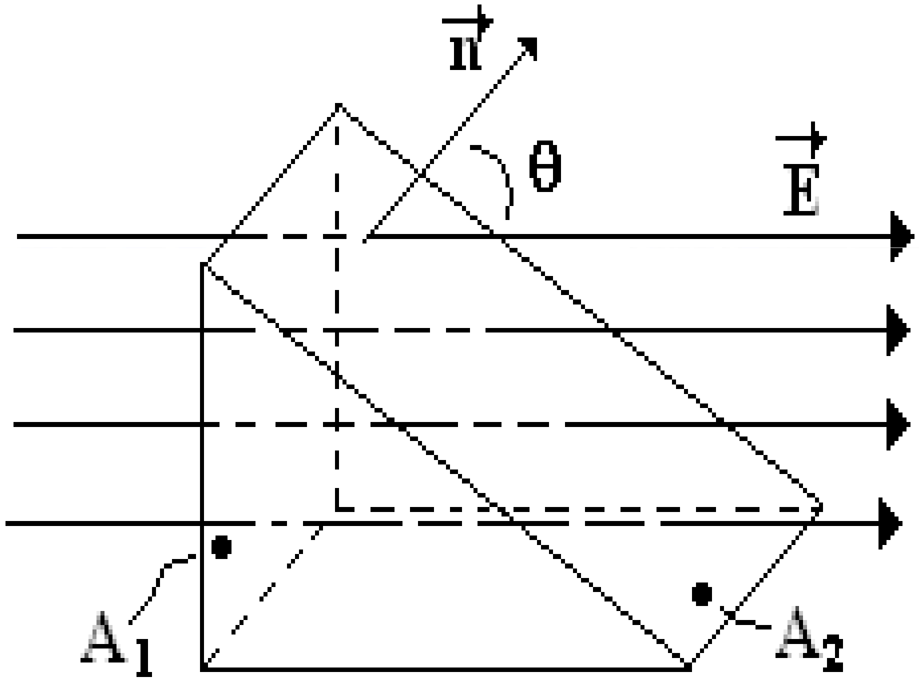


Flujo eléctrico (Φ)

$$\phi = \int_A \vec{E} \cdot d\vec{A} \left[\frac{N \cdot m^2}{C} \right]$$



Flujo eléctrico (Φ)



¿Cuál es el flujo eléctrico a través de las áreas 1 y 2

Flujo eléctrico (Φ)

El flujo a través de las áreas 1 y 2 es el mismo ya que:

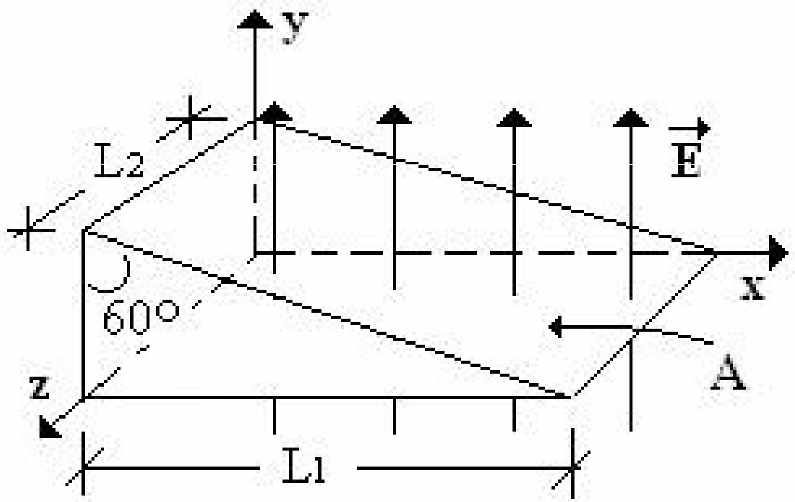
$$\phi = \int \vec{E} \cdot d\vec{A} = \int E dA \cos\theta = EA\cos\theta$$

Áreas relacionadas por:

$$A_2 \cos\theta = A_1$$

Flujo eléctrico

Considere una caja triangular con L_1=20 [cm] y L_2=15[cm] en un campo eléctrico uniforme $\vec{E} = 3.7 \times 10^4 \hat{j} \left[\frac{N}{C} \right]$ **como se muestra en la figura. Calcule el flujo eléctrico a través de la superficie inclinada (A).**



Flujo eléctrico

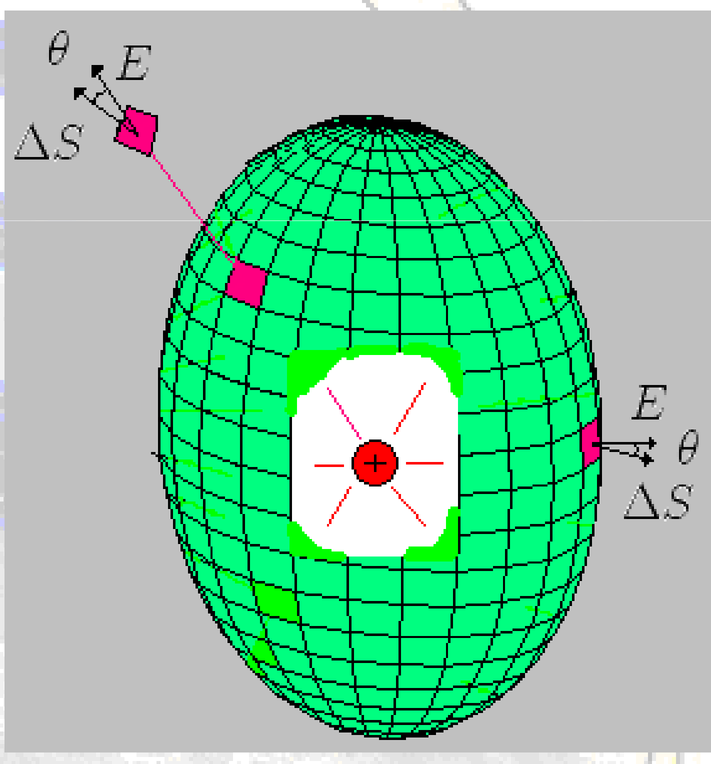
Solución.

$$\phi_A = \iint_A \vec{E}\cdot d\vec{A} = \iint_A E\,dA\,\cos\alpha; \quad \text{donde}: \alpha = 30[°]$$

$$h = \frac{L_1}{\cos\theta} = \frac{0.2}{\cos 30} = 0.2309[m]$$

$$\phi_A = \left(3.7\times 10^4\right)\left(0.15\times 0.2309\right)\cos 30 = 1109.8\left[\frac{N\cdot m^2}{C}\right]$$

Flujo eléctrico a través de una superficie cerrada.



Flujo eléctrico

Cuando el área de los elementos tiende a cero el número de elemento se aproxima a infinito por lo tanto la suma se convierte en una integral

$$\phi = \oint_S \vec{E} \cdot d\vec{A}$$

Ley de Gauss.

Cuando se obtiene el flujo del campo eléctrico a través de una superficie cerrada que contiene una carga neta, el resultado es:

$$\phi_e = \oiint \vec{E} \cdot d\vec{A} = \frac{Q_N}{\varepsilon_0}$$

Expresión conocida como ley de Gauss.

Ley de Gauss

La ley de Gauss dice que el flujo eléctrico, a través de cualquier superficie gaussiana es igual a la carga neta encerrada en la superficie dividida por la permitividad eléctrica del vacio o del aire.

$$\phi_E = \oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{Q_N}{\varepsilon_0}$$

Ley de Gauss.

Karl Friedrich Gauss (1777–1855) matemático científico alemán que estableció que el flujo eléctrico neto a través de cualquier superficie cerrada es igual a la carga neta de la superficie dividida por la permitividad eléctrica del medio.

Ley de Gauss

El contenido de la ley de Gauss surge al considerar el flujo eléctrico, que es la medida del número de líneas de campo eléctrico que atraviesan una superficie, pero que en la mayoría de los casos es una superficie cerrada, imaginaria denominada superficie gaussiana.

Flujo eléctrico

El flujo nos permite dibujar convenientemente el número de líneas que representa un campo eléctrico.
Un factor de escala típico es considerar una línea por metro cuadrado para una intensidad de 1 [N/C].

FMPR

Flujo eléctrico

Si tenemos una carga puntual Q positiva, la magnitud del vector intensidad de campo en un punto alejado de la carga un radio r_0 es:

$$E = k\frac{Q}{r_0^2}\left[\frac{N}{C}\right]$$

al colocar una superficie gaussiana que contenga ese punto, se puede conocer el número de líneas que atraviesan dicha superficie

Flujo eléctrico

Continuación. Como el campo eléctrico es proporcional al número de líneas que atraviesan el área de la superficie,

$$E = \frac{N_{lin}}{A} = \frac{N_{lin}}{4\pi \cdot r_0^2} = k\frac{Q}{r_0^2}$$

$$N_{lin} = K \cdot Q \cdot 4 \cdot \pi$$

Flujo eléctrico

Sustituyendo datos

$$N_{lin} = 9\times10^{9}(0.141\times10^{-9})(4)(3.1416)$$

$$N_{lin} = 16$$

Ley de Gauss

Utilizando los mismos datos del problema anterior, se tiene

$$\phi = \frac{Q_n}{\varepsilon_0} = \frac{0.212\times10^{-9}}{8.85\times10^{-12}} = 23.95\left[\frac{N\cdot m^2}{C}\right]$$

Al comparar los dos resultados anteriores, se tiene que si el factor de escala es el adecuado, el flujo representará el número de líneas que atraviesan la superficie.

Ley de Gauss

En general el flujo de cualquier campo vectorial a través de un elemento de superficie se define como:

$$d\phi = \vec{C} \cdot d\vec{A}$$

Donde se obtiene como resultado de multiplicar la componente del vector perpendicular a la superficie por el valor de ésta.

Ley de Gauss

Cuando se desea evaluar el flujo a través de una superficie finita, la ecuación anterior quedará

$$\phi = \iint_A \vec{C} \cdot d\vec{A}$$

El flujo a través de una superficie cerrada que contiene una carga neta QN es:

Ley de Gauss

$$\phi = \oint\!\!\oint_A \vec{C} \cdot d\vec{A} = \frac{Q_N}{\varepsilon_0} \left[\frac{N \cdot m^2}{C} \right]$$

Que es la Ley de Gauss.

Flujo eléctrico

Si una carga $q = 0.141 \times 10^{-9} [C]$

se coloca en origen de un sistema de referencia. ¿Cuál es el número de líneas que pasan por una superficie gaussiana esférica de radio r=2[cm] que se coloca de manera concéntrica con la carga?. De la relación

$$\frac{N_{lin}}{A} = E = k \frac{Q}{r^2}$$

Flujo eléctrico

haciendo la proporcionalidad de numero de líneas por unidad de área

$$\left(\frac{N_{lin}}{A}\right)$$

equivalente a la magnitud del campo, se tiene

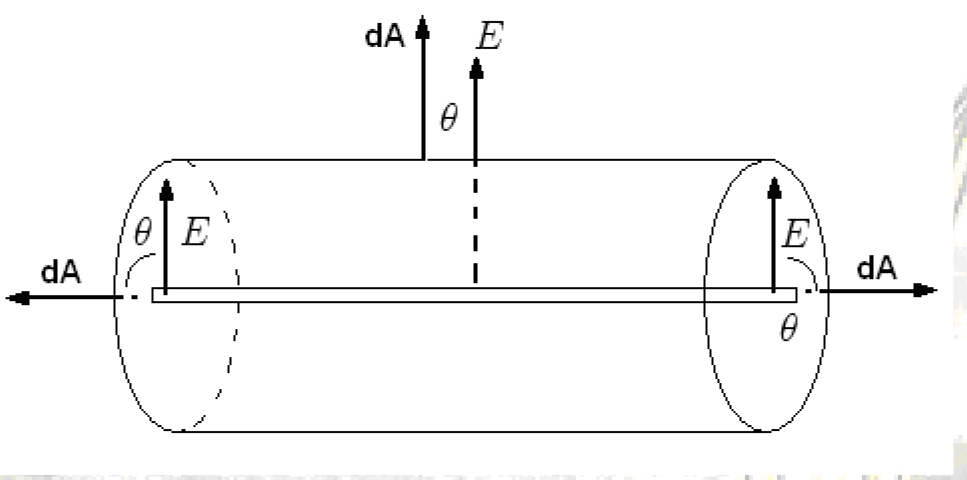
$$\frac{N_{lin}}{A} = E = k\frac{Q}{r^2}$$

Ley de Gauss.

La ley de Gauss es más conveniente que la de Coulomb para cálculos de campos eléctricos de distribuciones de carga altamente simétricos.

Campo eléctrico producido por una línea infinita

Sobre la línea se construye una superficie de Gauss cilíndrica.



Campo eléctrico producido por una línea infinita

La integral cerrada puede ser expresada como tres integrales abiertas

$$\oiint \vec{E} \cdot d\vec{A} = \iint \vec{E} \cdot d\vec{A}_1 + \iint \vec{E} \cdot d\vec{A}_2 + \iint \vec{E} \cdot d\vec{A}_3$$

Campo eléctrico producido por una línea infinita

En las tapas los vectores forman un ángulo de 90[°] por lo que el coseno será igual acero, entonces:

$$\oiint \vec{E} \cdot d\vec{A} = E \iint dA_2 = E(2\pi\, r\, h)$$

Campo eléctrico producido por una superficie cargada infinita

Usando la ley de Gauss

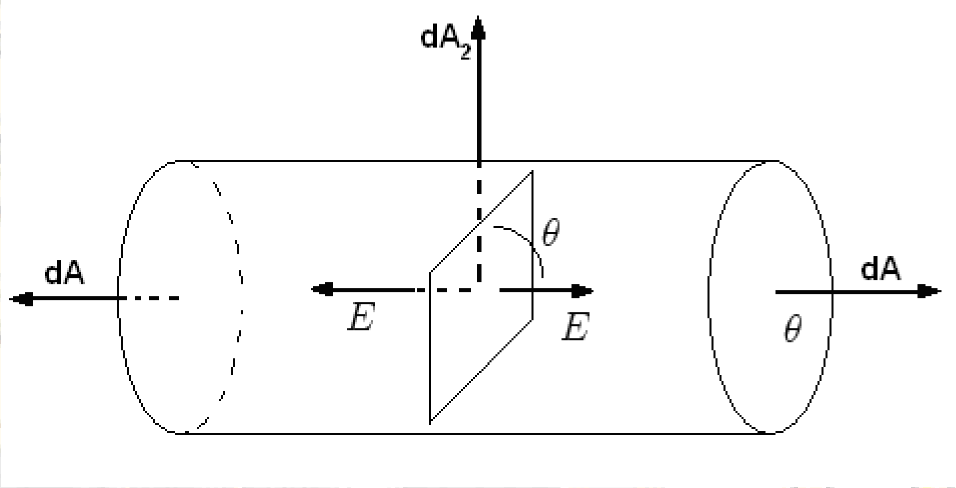
$$E(2\,\pi\, r\, h) = \frac{Q_N}{\varepsilon_0}$$

Despejando

$$E = \frac{1}{4\pi\,\varepsilon_0}\frac{2\lambda}{r}$$

Campo eléctrico producido por una superficie cargada infinita

En la figura se muestra una superficie cargada rodeada de una superficie gaussiana cilíndrica.



Campo eléctrico producido por una superficie cargada infinita

Como el vector área de la superficie cilíndrica forma un ángulo con respecto a las líneas de campo de 90 [°], se cancela esta componente, teniendo:

$$\oiint \vec{E} \cdot d\vec{A} = \iint \vec{E} \cdot d\vec{A}_1 + \iint \vec{E} \cdot d\vec{A}_3$$

Campo eléctrico producido por una superficie cargada infinita

Como los campos en las tapas son iguales

$$\oint\!\!\oint \vec{E}\cdot d\vec{A} = E\cdot A_1 + E\cdot A_3 = 2EA$$

Aplicando la ley de Gauss. $2EA = \dfrac{Q_N}{\varepsilon_0} = \dfrac{\sigma\cdot A}{\varepsilon_0}$

Por lo tanto $E = \dfrac{\sigma}{2\cdot\varepsilon_0}$

Ejemplo de flujo eléctrico

Una sección de una línea muy larga con distribución de carga lineal $\lambda = 100\times10^{-9}\left[\frac{C}{m}\right]$

se envuelve con una superficie gaussiana en forma de cubo, de lado L=10 [cm]. Determine el flujo eléctrico a través de la superficie gaussiana.

Ejemplo de flujo eléctrico

$$\phi = \frac{Q_N}{\varepsilon_0} = \frac{\lambda \cdot L}{\varepsilon_0} = \frac{100 \times 10^{-9} \times 0.1}{8.85 \times 10^{-12}}$$

$$\phi = \frac{1 \times 10^{-8}}{8.85 \times 10^{-12}} = 1129.94 \left[\frac{N \cdot m^2}{C} \right]$$

Campo eléctrico en cilindros y esferas metálicas.

Considerando las definiciones de carga lineal y carga superficial se puede demostrar que el campo eléctrico en el exterior de una esfera metálica se puede determinar por la expresión de carga puntual.

También el campo en el exterior de un cilindro se puede obtener por la expresión de una línea.

Bibliografía.

Gabriel A. Jaramillo Morales, Alfonso A. Alvarado Castellanos.
Electricidad y magnetismo.
Ed. Trillas. México 2003

Sears, Zemansky, Young,Freedman
Física Universitaria
Ed. PEARSON. México 2005